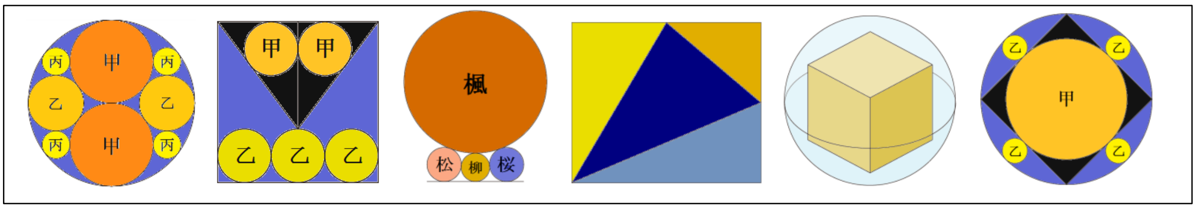
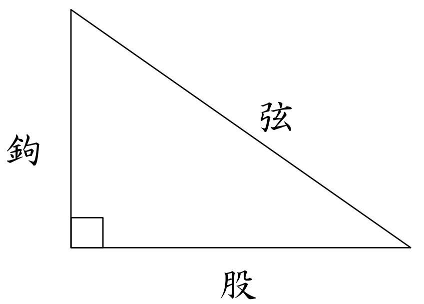
龍穏院新算額（解説）

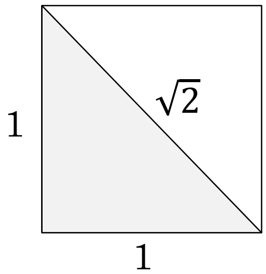


＜基本定理＞

（１） 鉤股弦の定理と三角定規

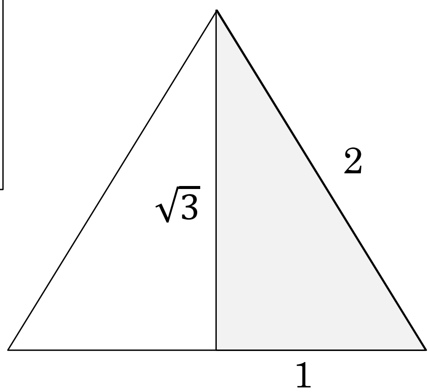


(鉤)^2 ＋ (股)^2 ＝ (弦)^2



$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$

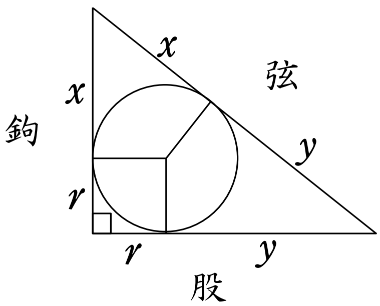
ひとよひとよにひとみごろ



$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$

ひとなみにおごれや

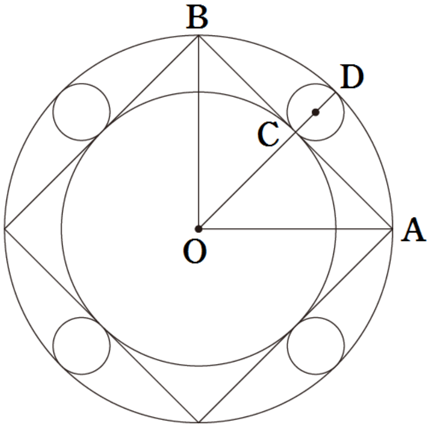
（２） 直角三角形の内接円



$$\begin{cases} 鉤 = r + x \\ 股 = r + y \\ 弦 = x + y \end{cases}$$

これより，内接円の直径は　$2r = \left(鉤 + 股\right) - 弦$

第１問



$$\begin{cases} OA:OB:AB = 1:1:\sqrt{2}\ (\triangle OAB \text{ は直角二等辺三角形}) \\ OA = OB = 4\ (\text{外円の半径}) \end{cases}$$

これより　$AB = 4\sqrt{2}$　であり，

$$AC = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{2}$$

$\triangle OAB \backsim \triangle CAO$（相似形）であるから，$OC=AC = 2\sqrt{2}$

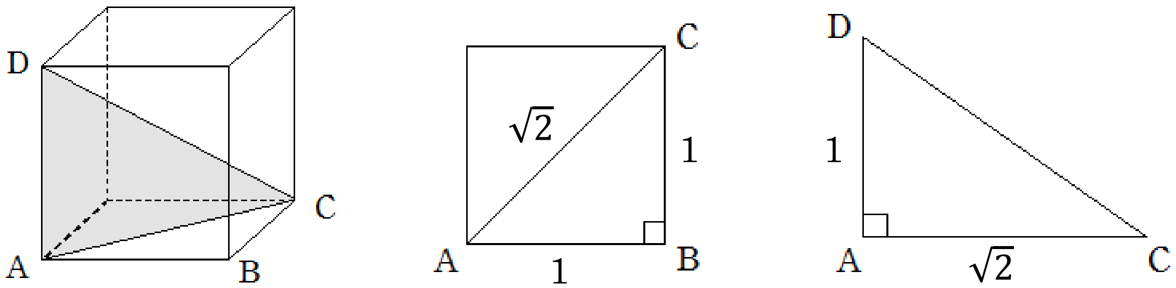
となって，<u>甲円の半径= $2\sqrt{2}$</u>（寸）

（これらをひっくるめて，$OC=OA \div \sqrt{2} = 4 \div \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ も可）

また，$CD=OD-OC = 4-2\sqrt{2} = 2(2-\sqrt{2})$ から

<u>乙円の半径 = $2-\sqrt{2}$</u>（寸）

第２問



立方体の辺の長さを仮に 1 とすると，$CD^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$　より　$CD = \sqrt{3}$

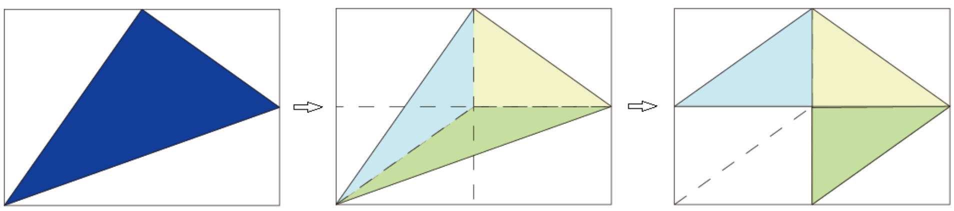
よって，$AB:CD = 1:\sqrt{3}$　すなわち　$CD = \sqrt{3}AB$

CD は外接球面の直径に等しいから，$CD = 3 \times 2 = 6$

これより，$\sqrt{3}AB=6$　となって，立方体の辺の長さは，

$$AB = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\ (\text{寸})$$

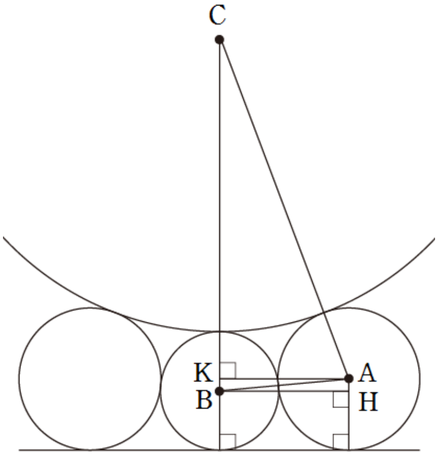
第３問

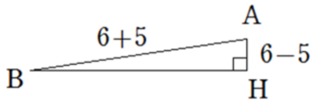


求める三角形の面積は，長方形の面積の 8 分の 3 であるから，

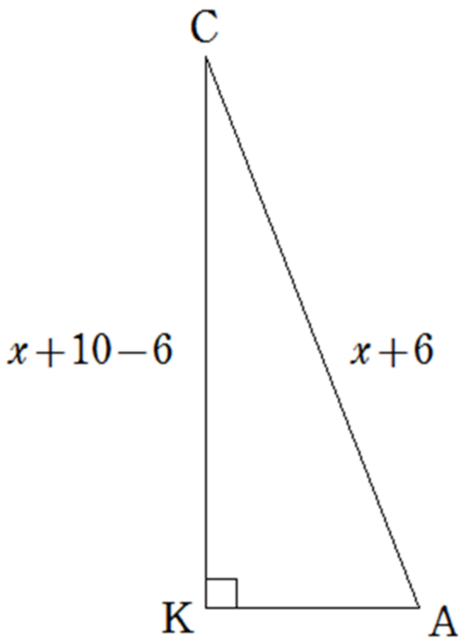
$$16 \times \frac{3}{8} = 6\ (\text{歩})$$

第４問





$\mathrm{BH}^2 = 11^2 - 1^2 = 120$



$\mathrm{KA}^2 = (x+6)^2 - (x+4)^2$

$\quad = (x^2 + 12x + 36) - (x^2 + 8x + 16) = 4x + 20$

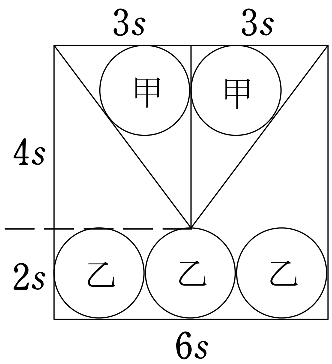
ここで，$\mathrm{KA} = \mathrm{BH}$　より　$\mathrm{KA}^2 = \mathrm{BH}^2$

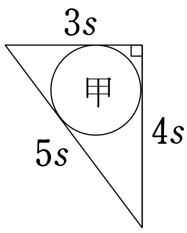
よって，$4x + 20 = 120$　を解いて，楓円の半径は　$x = 25$（寸）．

第５問

甲，乙円の半径をそれぞれ $r,\ s$ とすると，
右の図において基本定理を用いることにより，
$r = s$ が成り立つことが分かる．

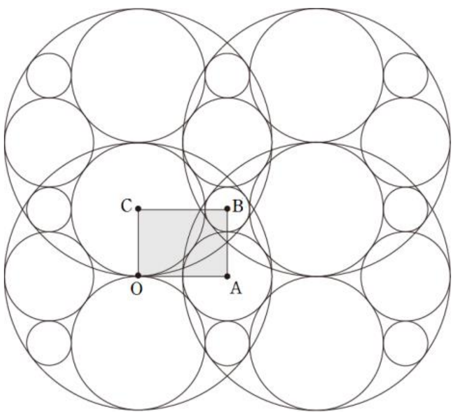
よって，甲円と乙円の半径は等しく，
（乙円の半径）＝1（寸）



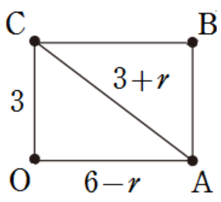


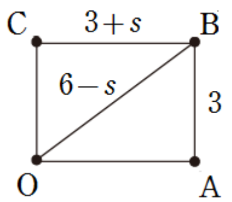
甲円の直径 $2r$ は，
$2r = (3s + 4s) - 5s = 2s$
であるから，$r = s$

第６問



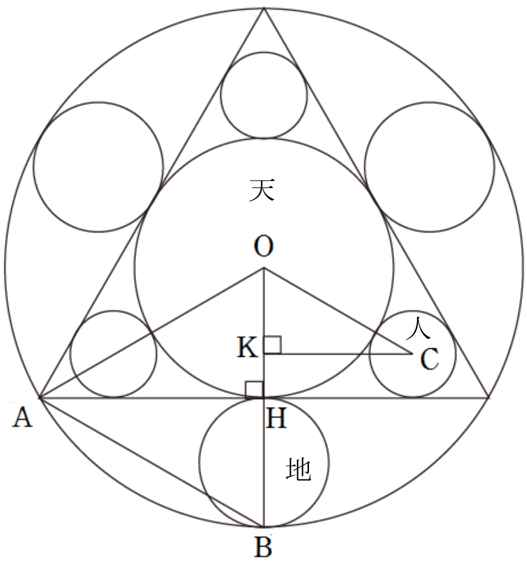
左図の敷き詰め文様により，各円の中心
を結ぶ四角形 OABC は長方形と分かる．
したがって，△OAC は直角三角形．





甲円の半径は外円の半径の半分で 3．また，乙，丙円の半径をそれぞれ $r,\ s$ とすると，
鉤股弦の定理により $r = 2$ となり，これより　$s = 1$．
すなわち，各半径は甲３寸，乙２寸，丙１寸．

小中学生向けチャレンジ問題その１（解説）



△OAB は正三角形だから，

OA＝OB＝AB＝12（外円の半径）

OH＝HB＝6

これより，天円の半径 6 寸，地円の半径 3 寸.

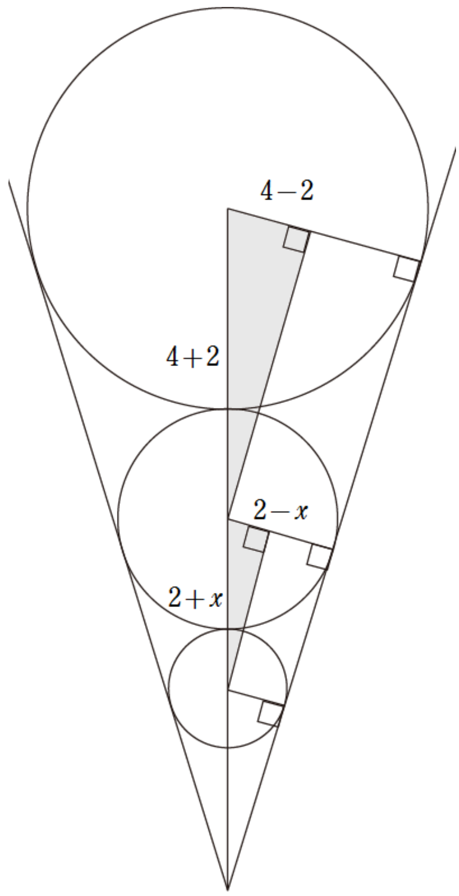
また，人円の半径を x とすると，

OC＝6+x，OK＝6−x

△OKC が正三角形の半分（三角定規）であることから，OC=2OK すなわち

$6 + x = 2(6 - x)$

これを解いて，$x = 2$ だから，人円の半径 2 寸.



小円の半径を x とすると，

左図の灰色に塗った直角三角形の相似により，

$$(2 + x):(4 + 2) = (2 - x):(4 - 2)$$

が成り立つから，

$$(2 + x):6 = (2 - x):2$$

$$2(2 + x) = 6(2 - x)$$

$$4 + 2x = 12 - 6x$$

$$8x = 8$$

$$x = 1$$

となって，人円の半径は 1 寸.

一般に，天地人の各円の半径を a，b，c とすると、

$$b^2 = ac$$

という関係が成り立つ.

※　疑問点やお気付きの点がございましたら，第２回（８／１１）にご参加の上，ご指摘ください.